令和６年　大学入試共通テスト（数学Ⅰ・数学 A）の略解と解説

一昨日　冗　著

注意：　答えは，赤文字 or 赤数字などで示す。解答の方法はいろいろあるので，私の解答に固執する必要はありません。あなたのやり方で解いてみて下さい。正解に行き着けば OK です。

第１問． ［１］根号を含む不等式や式の計算についての問題。

解答）不等式

$$n < 2\sqrt{13} < n+1 \qquad \cdots \quad ①$$

を満たす整数 n は，$n^2 < 52 < (n+1)^2$　より，$n = 7$　である。

　実数　$a,\ b$　を

$$a = 2\sqrt{13} - 7 \quad \cdots \quad ②, \quad b = \frac{1}{a} \quad \cdots \quad ③$$

で定める。このとき，

$$b = \frac{1}{2\sqrt{13}-7} = \frac{2\sqrt{13}+7}{(2\sqrt{13}-7)(2\sqrt{13}+7)} = \frac{2\sqrt{13}+7}{52-49} = \frac{7+2\sqrt{13}}{3} \quad \cdots \quad ④$$

である。また　$a^2 - 9b^2 = (2\sqrt{13}-7)^2 - 9\dfrac{(7+2\sqrt{13})^2}{9} = \cdots = -56\sqrt{13}$　である。

① から　$\dfrac{7}{2} < \sqrt{13} < \dfrac{7+1}{2} \quad \cdots \quad ⑤$　が成り立つ。

　太郎さんと花子さんは，$\sqrt{13}$　について話している。

太郎：⑤ から　$\sqrt{13}$　のおよその値はわかるけど，小数点以下はよくわからないね。
花子：　小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

---

① と ④　から　$\dfrac{m}{3} < b < \dfrac{m+1}{3}$　を満たす m は，この式を変形して

$m - 7 < 2\sqrt{13} < m - 6$　を得るので，$m = 14$　となる。よって，③ から

$$\frac{3}{m+1} < a < \frac{3}{m} \qquad \cdots \quad ⑥$$

が成り立つ。この式は　$\dfrac{3}{15} < 2\sqrt{13} - 7 < \dfrac{3}{14}$　と同等で　$3.6 = \dfrac{54}{15} < \sqrt{13} < \dfrac{101}{28} = 3.607\cdots$
となるので，
$\sqrt{13}$　の整数部分は　3　であり，小数第１位の数字は　6，小数第２位の数字は　0　であることがわかる。

第１問． ［２］（三角比の表の利用あり）水平な地面（以下，地面）に垂直に立っている電柱の高さを，その影の長さと太陽高度を利用して求めよう。

　図１のように，電柱の影の先端は坂の斜面（以下，坂）にあるとする。また，坂には傾斜を表す道路標識が設置されていて，そこには７％と表示されているとする。

　電柱の太さと影の幅は無視して考えるものとする。また，地面と坂は平面であるとし，地面と坂が交わってできる直線を ℓ とする。

　電柱の先端を点 A とし，根もとを点 B とする。電柱の影について，地面にある部分を線分 BC とし，坂にある部分を線分 CD とする。線分 BC，CD がそれぞれ ℓ と垂直であるとき，電柱の影は坂に向かってまっすぐにのびているということにする。

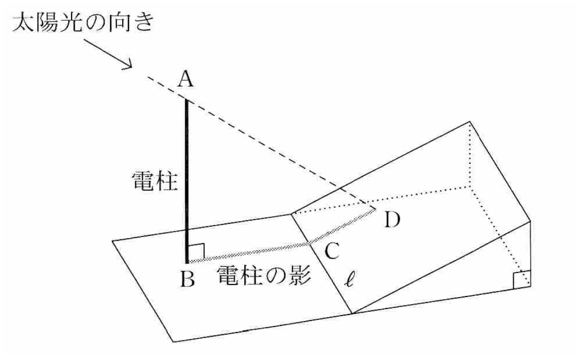


図　1

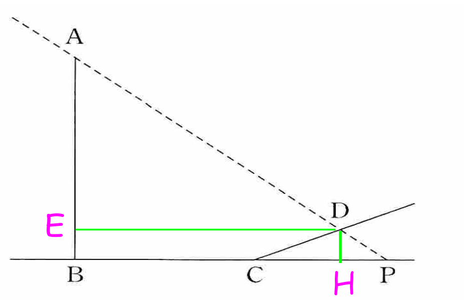


図　2

電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびているとする。このとき，4 点 A,B,C,D を通る平面は ℓ と垂直である。その平面において，図 2 のように，直線 AD と直線 BC の交点を P とすると，太陽高度とは $\angle$APB の大きさのことである。

道路標識の 7 % という表示は，この坂をのぼったとき，100m の水平距離に対して 7m の割合で高くなることを示している。n を 1 以上 9 以下の整数とする。

解答）坂の傾斜角 $\angle$DCP の大きさについて　$n^\circ < \angle\mathrm{DCP} < n^\circ + 1^\circ$　を満たす n の値は，

$\angle\mathrm{DCP} = \theta$　とおくと　$\tan\theta = \dfrac{7}{100} = 0.07$　だから，三角比の表から

$\tan 4^\circ < 0.07 < \tan 5^\circ$　がわかるので，$n = 4$　である。

以下では，$\angle$DCP の大きさは，ちょうど 4° であるとする。

ある日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき，影の長さを調べたところ BC= 7m, CD= 4m であり，太陽高度は $\angle$APB= 45° であった。点 D から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とするとき（点 D から直線 BC に垂直な直線を引き，直線 BC との交点を H とする），このとき

$$\mathrm{BE}=\mathrm{HD},\quad \sin\theta = \frac{\mathrm{DH}}{4}\ ,\ より\quad \mathrm{BE}= 4 \times \sin\angle\mathrm{DCP}\ \mathrm{m}\quad であり，$$

$$\mathrm{DE}=\mathrm{BC}+\mathrm{CH}= (\ 7 + 4 \times \cos\angle\mathrm{DCP}\ )\mathrm{m}$$

ある。よって電柱の高さは，小数第 2 位で四捨五入すると

$$\mathrm{AB}=\mathrm{DE}+\mathrm{DH}= (7 + 4\cos 4^\circ) + 4\sin 4^\circ = 10.9904 + 0.2792 = 11.2696 = 11.3\ \mathrm{m}$$

であることがわかる。

別の日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽の高度は $\angle\mathrm{APB} = 42^\circ$ であった。電柱の高さがわかったので，前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。（図 3 参照）電柱の影について，坂にある部分の長さ CD を求めよ（CD の式は穴埋め式で与えられている）。

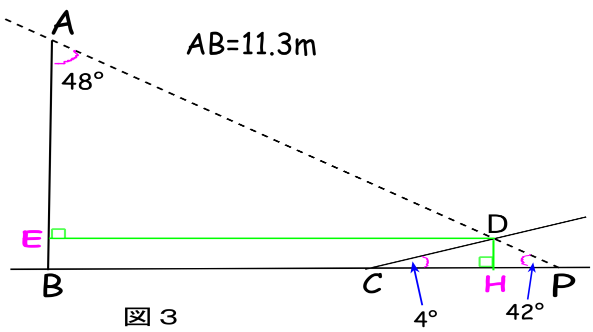


図３

さて，三角形 ABP において，　$\tan 42^\circ = \dfrac{11.3}{\mathrm{PB}}$　だから

$$\mathrm{CP}=\mathrm{CH}+\mathrm{HP}=\mathrm{PB}-7=\frac{11.3}{\tan 42^\circ}-7 \quad \cdots \quad ①$$

また，　$\tan 4^\circ = \dfrac{\mathrm{HD}}{\mathrm{CH}}$,　$\tan 42^\circ = \dfrac{\mathrm{HD}}{\mathrm{PH}}$,　だから　$\mathrm{CH}\tan 4^\circ = \mathrm{HP}\tan 42^\circ \quad \cdots \quad ②$

① より，　$\mathrm{HP}=\dfrac{11.3}{\tan 42^\circ}-7-\mathrm{CH}$,　これを② に代入して，

$$\mathrm{CH}\tan 4^\circ = \left(\frac{11.3}{\tan 42^\circ}-7-\mathrm{CH}\right)\tan 42^\circ$$

これを整理すると，　$\mathrm{CH}=\dfrac{11.3-7\tan 42^\circ}{\tan 4^\circ+\tan 42^\circ}$,　そして　$\mathrm{CD}=\dfrac{\mathrm{CH}}{\cos 4^\circ}$　だから

$$\mathrm{CD}=\frac{11.3-7\tan 42^\circ}{\cos 4^\circ(\tan 4^\circ+\tan 42^\circ)}=\frac{\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ}{\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ}.$$

解説）［１］は，根号を含む式の計算で基本的なものでした。$\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エオカ}}$ まではレベル 3.5，$\boxed{\text{キク}}$ はレベル 3，$\boxed{\text{ケ}}$ から $\boxed{\text{サ}}$ まではレベル 2.5 ですね。

［２］は，三角比の問題ですが，これも基本的な計算なので点数はとれたでしょうね。しかし三角比の角度の所を ∠DCP などと書くのは関数式としてみばえが良くないね。$\boxed{\text{シ}}$ はレベル 3.5，$\boxed{\text{ス}}$ から $\boxed{\text{チ}}$ はレベル 3，$\boxed{\text{ツ}}$ は計算ミスがありそうなので，レベル 2 ですね。最後の CD の長さを求める問題は，レベル 1 ですね。けっこう難しい計算なので重要な式を 1 つ中に挟んだ方が良かったと思うよ。しつこく言いますが，∠DCP を式の中に書くのはいただけないね。4°，42° をそのまま使った方が式がきれいだよね。

第２問．［１］座標平面上に 4 点 O(0,0)，A(6,0)，B(4,6)，C(0,6) をを頂点とする台形 OABC がある。また，この座標平面上で，点 P, Q は次の規則に従って移動する。

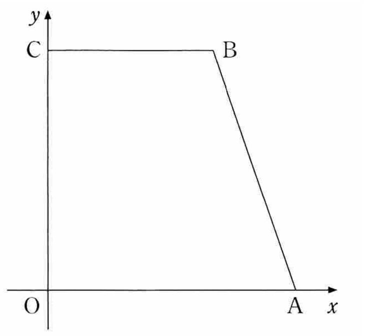
－－－－－－－－－－－－－－－－－<規則>－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

・P は，O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し，A に到達した時点で移動を終了する。

・Q は，C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し，O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして，C に到達した時点で移動を終了する。ただし，Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する。

・P，Q は同時刻に移動を開始する。

－－



参考図

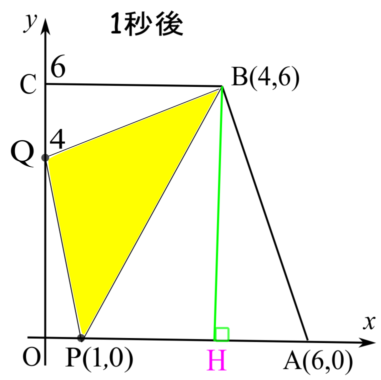


図1

この規則に従って P，Q が移動するとき，P，Q はそれぞれ A，C に同時刻に到達し，移動を終了する。

以下において，P,Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**，移動を終了する時刻を**終了時刻**とする。

(1) **開始時刻**から 1 秒後の △PBQ の面積を求めよ（上の図 1 参照)。

解答）　△CQB, △QOP, △BPH の面積は，それぞれ　4, 2, 9 なので，

$$\triangle\mathrm{PBQ}\ の面積 = 24 - 15 = 9$$

である。

(2) **開始時刻**から 3 秒間の △PBQ の面積について，面積の最小値と最大値を求めよ。

解答）下の図 2 より，時刻 t $(0 \leqq t \leqq 3)$ の面積 S は，四角形 COHB の面積 24 から 3 つの三角形の面積 S_1, S_2, S_3(△BPH の面積) を引けばよい。したがって

$$S = 24 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2t - \frac{1}{2}t(6-2t) - \frac{1}{2}(4-t) \times 6 = \ \cdots \ = t^2 - 4t + 12$$
$$= (t-2)^2 + 8 \quad \cdots \quad ①$$

これより，$t = 2$ のとき，最小値は 8，$t = 0$ のとき，最大値は 12 である。

(3) **開始時刻**から**終了時刻**までの △PBQ の面積について，面積の最小値と最大値を求めよ。

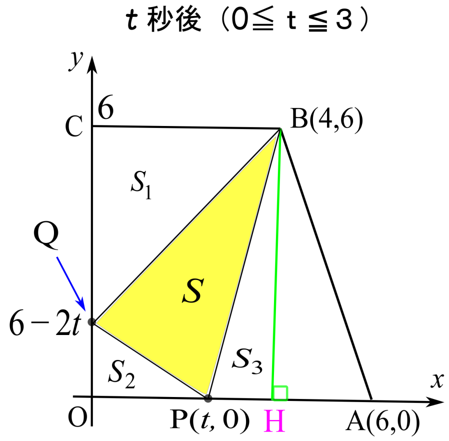


図2

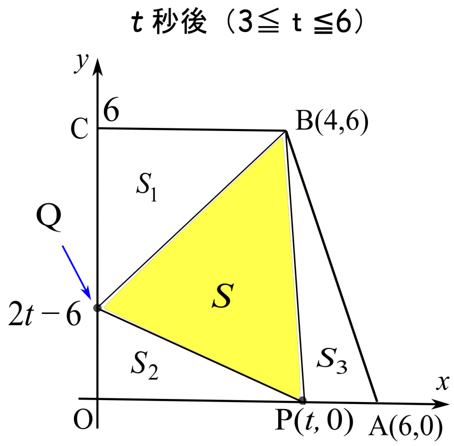


図3

解答）図 3 より，$3 \leqq t \leqq 6$ のときの面積 S は，台形 OABC の面積 30 から 3 つの三角形の面積 S_1, S_2, S_3 を引けばよい。

$$S = 30 - \frac{1}{2} \times 4(12-2t) - \frac{1}{2}t(2t-6) - \frac{1}{2}(6-t) \times 6 = \ \cdots \ = -(t-5)^2 + 13 \quad \cdots \quad ②$$

①と② のグラフをつないだものが全体のグラフである。このグラフから，最小値は 8，最大値は 13 であることがわかる。

(4) **開始時刻**から**終了時刻**までの △PBQ の面積について，面積が 10 以下となる時間は何秒間か求めよ。

解答）２つの方程式　① = 10, ② = 10　から，t の値を求めると，後者マイナス前者が答えである。

$(t-2)^2 + 8 = 10$　　より　　$t = 2 - \sqrt{2}$.

$-(t-5)^2 + 13 = 10$　　より　　$t = 5 - \sqrt{3}$.

よって答えは，　$3 - \sqrt{3} + \sqrt{2}$　秒間である。

第 2 問．［２］高校の陸上部で長距離競技の選手として活躍する太郎さんは，長距離競技の公認記録が掲載されている Web ページを見つけた。この Web ページでは，各選手における公認記録のう

ち最も速いものが掲載されている。その Web ページに掲載されている，ある選手のある長距離競技での公認記録を，その選手のその競技でのベストタイムということにする。

なお，以下の図や表については，ベースボール・マガジン社「陸上競技ランキング」の Web ページをもとに作成している。

(1) 太郎さんは，男子マラソンの日本人選手の 2022 年末時点でのベストタイムを調べた。その中で，2018 年より前にベストタイムを出した選手と 2018 年以降にベストタイムを出した選手に分け，それぞれにおいて速い方から 50 人の選手のベストタイムをデータ A，データ B とした。

ここでは，マラソンのベストタイムは，実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。例えば　2 時間 5 分 30 秒であれば，$60 \times 5 + 30 = 330$（秒）となる。

(i) 図 1 と図 2 はそれぞれ，階級の値を 30 秒とした A と B のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

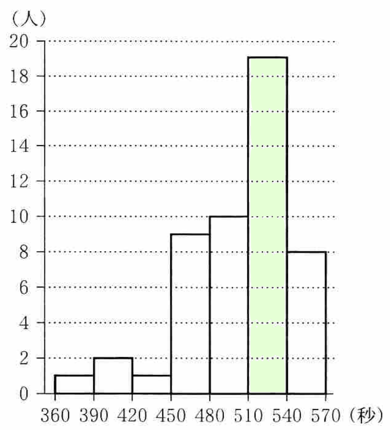


図 1　A のヒストグラム

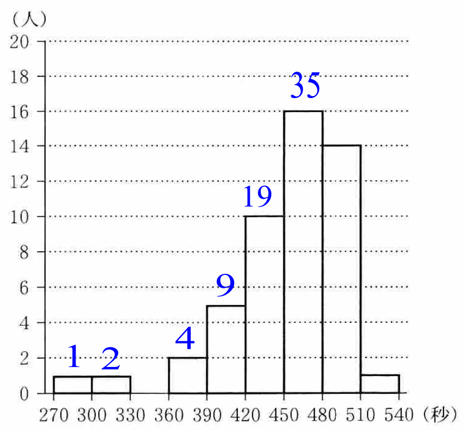


図 2　B のヒストグラム

解答）図 1 から A の最頻値は，うす緑色で示した階級 510 以上 540 未満である。また，図 2 から B の中央値が含まれる階級は，25 番目と 26 番目のデータの平均なので，450 以上 480 未満である。

【注意】図の中のカラーで示した領域や，カラーの数字（図 2 の累積度数）などは著者が解答のために付け加えたものです。皆さんもこんなふうに書くよね。

(ii) 図 3 は，A, B それぞれの箱ひげ図を並べたものである。ただし，中央値を示す線は省いている。（カラーの数字や線は，著者が解答するために書き入れたものである。正確な値ではない。）

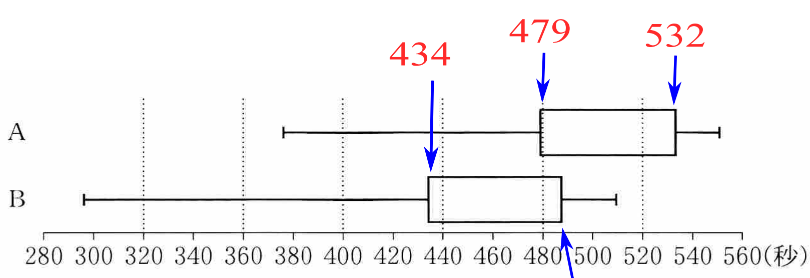


図 3　A と B の箱ひげ図

図 3 より次のことが読み取れる。ただし，A, B それぞれにおける，速い方からの 13 番目の選手は，一人ずつとする。

・B の速い方から 13 番目の選手のベストタイムは，A の速い方から 13 番目の選手のベストタイ

ムより，およそ 45 秒速い。（13 番目の選手のタイムは，第 1 四分位点の値のことである。これらの差のおおよその値は，$479 - 434 = 45$ である）

・ A の四分位範囲から B の四分位範囲を引いた差の絶対値は 0 以上 20 未満である。なぜならば，

A の四分位範囲のおおよその値は，$532 - 479 = 53$

B の四分位範囲のおおよその値は，$487 - 434 = 53$

となり，差の絶対値はほとんど 0 であるからである。

(iii) 太郎さんは，A のある選手と B のある選手のベストタイムの比較において，その二人の選手のベストタイムが速いか遅いかとは別の観点でも考えるために，次の式を満たす z の値を用いて判断することにした。

−−−−−−−<式>−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

（あるデータのある選手のベストタイム）＝

（そのデータの平均値）$+z\times$（そのデータの標準偏差）

−−

二人の選手のそれぞれのベストタイムに対する z の値を比較し，その値の小さい選手の方が優れていると判断する（著者の苦言：この判断は受け入れられるものでしょうかね？，受験生はどう思うだろう？）。

表 1 は，A, B それぞれにおける，速い方から 1 番目の選手（以下，1 位の選手）のベストタイムと，データの平均値と標準偏差をまとめたものである。

表 1　1 位の選手のベストタイム，平均値，標準偏差

データ	1 位の選手のベストタイム	平均値	標準偏差
A	376	504	40
B	296	454	45

解答）式と表 1 を用いると，B の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は，

$296 = 454 + z \times 45$　より　$z = -\dfrac{158}{45} = -3.51$　である。

このことから，B の 1 位の選手のベストタイムは，平均値より標準偏差のおよそ 3.51 倍だけ小さいことがわかる。

A, B それぞれにおける 1 位の選手についての記述として，次の ⓪ 〜③ のうち，正しいものは，「① ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている」

である。なぜならば，データ A の 1 位の選手の z の値は　$376 = 504 + z \times 40$　より，$z = -3.2$ であり，上の　-3.51　より大きいからである。

(2) 太郎さんは，マラソン，10000m，5000m のベストタイムに関連がないかを調べることにした。そのために，2022 年末時点でのこれら 3 種目のベストタイムをすべて確認できた日本人男子選手のうち，マラソンのベストタイムが速い方から 50 人を選んだ。

図 4 と図 5 はそれぞれ，選んだ 50 人についてのマラソンと 10000m のベストタイム，5000m と 10000m のベストタイムの散布図である。ただし，5000m と 10000m のベストタイムは秒単位で表し，マラソンのベストタイムは (1) の場合と同様，実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。

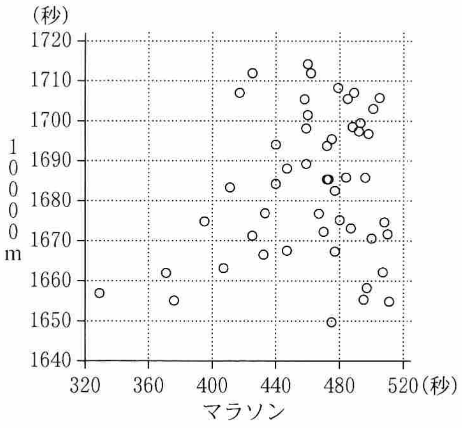


図4　マラソンと 10000 m の散布図

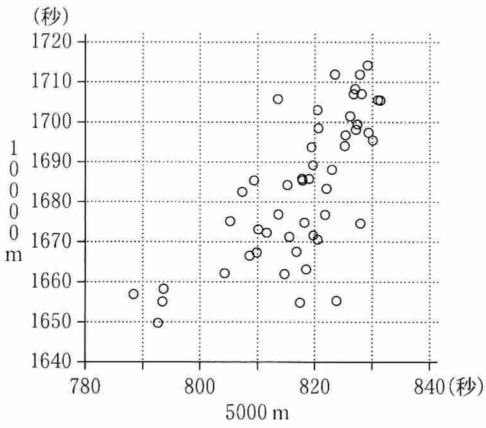


図5　5000 m と 10000 m の散布図

解答）次の (a), (b) は，図4と図5に関する記述である。

(a) マラソンのベストタイムの速い方から3番目までの選手の 10000m のベストタイムは，3選手とも 1670 秒未満である。
(b) マラソンと 10000m の間の相関は，5000m と 10000m の間の相関より強い。

(a), (b) の正誤の組み合わせとして正しいものは，「① (a) 正，(b) 誤」　である。なぜならば，(a) が正しいことは　図4より明らか。相関については，図5の方が図4よりも，点の集合として直線的（ばらつきが小さい）なので判断できる。

解説）［1］は，四角形上を動く2つの動点と1つの定点がつくる三角形の面積（2次関数になる）の問題で，教科書にもよくある問題なので，とっつきやすかったことでしょう。(1) はレベル 3.5，(2) はレベル 3，(3) はレベル 2.5，(4) はレベル 2 でしょう。解答にあるような図1～図3がすぐ描けるか否かが勝負の分かれ目かな。

［2］は，データ分析の問題だが，問題の設定が長すぎるね。読むだけで疲れちゃうよ。基本的な知識を見るだけなら，もっと簡単でわかりやすいデータを使って欲しいよね。問題文が長いわりに質問の内容がやさしすぎるので，入試問題としては失敗作ですね。

(i) はレベル 4，(ii) はレベル 3，(iii) の $\boxed{ソ}$ $\boxed{タチ}$ はレベル 3，$\boxed{ツ}$ はレベル 2.5 ですね。(2) の散布図の問題はやさしすぎるよね。レベル 3 だね。

第3問． 箱の中にカードが2枚以上入っており，それぞれのカードにはアルファベットが1文字だけ書かれている。この箱の中からカードを1枚取り出し，書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返し行う。

(1) 箱の中に $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ のカードが1枚ずつ全部で2枚入っている場合を考える。以下では，2以上の自然数 n に対し，n 回の試行で A, B がそろっているとは，n 回の試行で $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ のそれぞれが少なくとも1回は取り出されることを意味する。

解答） (i) 2回の試行で A, B がそろっている確率は，1回目はどちらが出てもよいから確率 1，2回目は1回目と異なるものが選ばれなければいけないので確率 $\dfrac{1}{2}$，

したがって答えは　$1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$　である。

(ii) 3回の試行で A, B がそろっている確率を求める。

例えば，3回の試行のうち $\boxed{A}$ を1回，$\boxed{B}$ を2回取り出す取り出し方は3通りあり，それらを

すべて挙げると次のようになる。

1 回目	2 回目	3 回目
$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$
$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$
$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{A}}$

このように考えることにより，3 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は，上の 3 っつと，上の A, B を交換したものの 3 っつがあるので。6 通りあることがわかる。よって，3 回の試行で A, B がそろっている確率は $\dfrac{6}{2^3}=\dfrac{3}{4}$ である。

(iii) 4 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は，B が 1 つの場合が ${}_4C_1=4$ 通り，B が 2 つの場合が ${}_4C_2=6$ 通り，B が 3 つの場合が ${}_4C_3=4$ 通りだから，全部で 14 通りである。よって，4 回の試行で A, B がそろっている確率は $\dfrac{14}{2^4}=\dfrac{7}{8}$ である。

(2) 箱の中に $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 3 枚入っている場合を考える。

以下では，3 以上の自然数 n に対し，n 回目の試行で初めて A, B, C がそろうとは，n 回の試行で $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

解答） (i) 3 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は，$\boxed{\text{C}}$ が 3 回目に出るとすると，2 通り: $\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{A}}\boxed{\text{C}}$
しかない。3 回目に出るのが $\boxed{\text{A}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の場合もあるので，答えは $2\times 3=6$ 通りである。

よって，3 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率は $\dfrac{6}{3^3}=\dfrac{2}{9}$ である。

(ii) 4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率を求める。

4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は，(1) の (ii) を振り返ることにより計算できる

4 回目に $\boxed{\text{C}}$ が出る場合を考えたとき，3 回目までは A と B で出来ていなければならないので，6 通りである（(1) の (ii) より）。4 回目が $\boxed{\text{A}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の場合もあるので，4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は $6\times 3=18$ 通りなので，その確率は $\dfrac{18}{3^4}=\dfrac{2}{9}$ である。

(iii) 5 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方を求めよう。下の図のように 5 回目に初めて $\boxed{\text{C}}$ が出た場合を考えよう

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\text{C}}$

前の 4 つの箱には A と B のいずれかが入っていなければならない。B が 1 回入る場合の数は，${}_4C_1=4$，B が 2 回入る場合の数は，${}_4C_2=6$，B が 3 回入る場合の数は，${}_4C_3=4$ だから，全部で 14 通り。5 回目が $\boxed{\text{A}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の場合もあるので，14 の 3 倍の 42 通りが答えである。よって，5 回目の施行で初めて A, B, C がそろう確率は $\dfrac{42}{3^5}=\dfrac{14}{81}$ である。

(3) 箱の中に $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 4 枚入っている場合を考える。

以下では，6 回目の試行で初めて A, B, C, D がそろうとは，6 回の試行で $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ のうちいずれか 1 枚が 6 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

また，3 以上 5 以下の自然数 n に対し，6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろうとは，6 回の試行のうち 1 回目から n 回目の試行で $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，$\boxed{\text{D}}$ は 1 回も取り出されず，かつ $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のうちいずれか 1 枚が n 回目の

試行で初めて取り出されることを意味する。6 回の試行のうち n 回目の試行で初めて B, C, D だけがそろうなども同様に定める。

太郎さんと花子さんは，6 回目の試行で初めて A, B, C, D がそろう確率について考えている。

太郎：例えば，5 回目までに $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ 6 回目に初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される場合を考えたら計算できそうだね。

花子：それなら，初めて A, B, C だけがそろうのが，3 回目のとき，4 回目のとき，5 回目のときで分けて考えてみてはどうかな。

解答） 6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろう取り出し方が 6 通りであることに注意すると,「6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方は何通りか。下の 6 つの箱で考える。X の所には A, B, C のいずれかが入る。

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\text{X}}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\text{D}}$

最初の 3 つの箱に入る入り方は 6 通り（(2) の (i) の $\boxed{\text{ク}}$ ）で，4 つ目と 5 つ目の箱には A, B, C のいずれかが入っていいので，場合の数は全部で $6 \times 3 \times 3 = 54$ 通りであることがわかる。

同じように考えると,「6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方は何通りか。下の 6 つの箱で考える。X の所には A, B, C のいずれかが入る。

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\text{X}}\ \boxed{}\ \boxed{\text{D}}$

最初の 4 つの箱に入る入り方は，(2) の (ii) より，18 通りであることがわかっている。5 つ目の箱には A, B, C のいずれかが入っていいので，場合の数は全部で $18 \times 3 = 54$ 通りであることもわかる。

以上のように考えることにより，6 回目の試行で初めて A, B, C, D がそろう確率を求めよう。「6 回の試行のうち 5 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」場合の数を下の図で考える。X の所には A, B, C のいずれかが入る。

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\text{X}}\ \boxed{\text{D}}$

最初の 4 つに入る X 以外の 2 文字が作る場合の数は，${}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 = 14$ 通り（例えば，X が C のとき，B が 1 つしかない場合は ${}_4C_1 = 4$ 通り，B が 2 つある場合は ${}_4C_2 = 6$ 通り，B が 3 つある場合は ${}_4C_3 = 4$ 通り）だから，場合の数は全部で $14 \times 3 = 42$ 通りである。 以上より 6 回目が $\boxed{\text{D}}$ となる取り出し方は $54 + 54 + 42 = 150$ 通りである。 $\boxed{\text{D}}$ の所を $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ で置き換えて同様に考えると場合の数の総数は 150×4 通りとなる。したがって，問題の確率は

$$\frac{150 \times 4}{4^6} = \frac{75}{512}$$ であることがわかる。

解説）場合の数と確率の計算の問題で，(1), (2) は比較的やさしいが，(3) は難しかったね。現実の世界でこんな問題があるかどうかはわからないよね。ていねいな説明で多くのヒントを与えてくれているのだが，理解できたかな？ 特に，(3) の紫色の文章の所は，正しく理解するのが難しかったでしょうね。この問題も，第 2 問［2］と同様に問題文が長すぎるよね。

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ はレベル 3.5, $\boxed{\text{エオ}}$, $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ はレベル 3, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ はレベル 2.5, $\boxed{\text{サシ}}$ はレベル 2, $\boxed{\text{スセ}}$, $\boxed{\text{ソタ}}$ はレベル 1.5，最後の $\boxed{\text{チツ}}$, $\boxed{\text{テトナ}}$ はレベル 1 ですね。

第４問． T3, T4, T6 を次のようなタイマーとする。

T3：　3 進数を 3 桁表示するタイマー
T4：　4 進数を 3 桁表示するタイマー
T6：　6 進数を 3 桁表示するタイマー

なお，n 進数とは n 進法で表された数のことである。これらのタイマーは，すべて次の**表示方法**に従うものとする。

－－<**表示方法**>－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

(a) スタートした時点でタイマーは 000 と表示されている。

(b) タイマーは，スタートした後，表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき，3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に，表示が 000 に戻る。

(c) タイマーは表示が 000 に戻った後も，(b) と同様に，表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき，3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に，表示が 000 に戻るという動作を繰り返す。

－－－

T 3

参考図

例えば，T3 はスタートしてから 3 進数で $12_{(3)}$ 秒後に 012 と表示される。その後，222 と表示された 1 秒後に表示が 000 に戻り，その $12_{(3)}$ 秒後に再び 012 と表示される。

解答）(1) T6 は，スタートしてから 10 進数で 40 秒後に，104 と表示される。なぜならば，図 1 ,(a) より，40 は 6 進数で $104_{(6)}$ だからである。

(a)

$$\begin{array}{r|l} 6 \,) & 40 \\ 6 \,) & 6 \cdots\cdots 4 \\ & 1 \cdots\cdots 0 \end{array}$$

$$40 = 104_{(6)}$$

(b)

$$10011_{(2)} = 2^4 + 1 \times 2^1 + 1 = 19$$

(c)

$$\begin{array}{r|l} 4 \,) & 19 \\ 4 \,) & 4 \cdots\cdots 3 \\ & 1 \cdots\cdots 0 \end{array}$$

$$19 = 103_{(4)}$$

図1

T4 は，スタートしてから 2 進数で $10011_{(2)}$ 秒後に 103 と表示される。なぜならば，上の図の (b),(c) より，2 進数 $10011_{(2)}$ は 10 進数で 19，19 は 4 進数で $103_{(4)}$ だからである。

(2) T4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，スタートしてから 4 進法で $333 + 1$ 秒後なので，10 進数で

$$3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3 + 1 = 48 + 12 + 3 + 1 = 64 \qquad (\,64 = 4^3 \text{ に注意})$$

秒後であり，その後も 64 秒ごとに表示が 000 に戻る。

同様の考察を T6 に対しても行うことにより，T4 と T6 を同時にスタートさせた後，初めて両

方の表示が同時に 000 にもどるのは，スタートしてから 10 進数で，1728 秒後であることがわかる。なぜならば，T4 は 64 秒ごとに，T6 は $6^3 = 216$ 秒ごとに 000 に戻るので，最初に同時に 000 になるのは，この 2 数の最小公倍数：すなわち $2^3 \times 2^3 \times 3^3 = 1728$ 秒後であるからである。

(3) 0 以上の整数 ℓ に対して，T4 をスタートさせた ℓ 秒後に T4 が 012 と表示されることと

ℓ を 64 で割った余りが 6 であること

は同値である。ただし，上の 2 数は 10 進法で表されているものとする。なぜならば，$012_{(4)}$ は 10 進数で 6 であり，T4 は 64 秒ごとに 000 になるからである。

T3 についても同様の考察を行うことにより，次のことがわかる。

T3 と T4 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を m 秒とするとき，m は 10 進法で 518 と表される。なぜならば，

3 進数 $012_{(3)}$ は 10 進法で 5 なので，$27x + 5 = 64y + 6$ を満たす最小の正の整数のペア $(x,\ y)$ を見つければよい。しかし，これは難しい問題です。解を見つける簡単な方法は，私もよくわかりません。上の不定方程式は $27x - 64y = 1$ で，27 と 64 はたがいに素なので，整数解は存在します。また，x は奇数でなければならないこともわかります。試行錯誤して解を探すと，$y = 8,\ x = 19$ が見つかります（ほとんどの方は見つけられないでしょう）。

また，T4 と T6 の表示に関する記述として，次の ⓪ 〜③ のうち，正しいものは

③ T4 と T6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない。

である。なぜならば，T3 と T4 の場合と同様に，不定方程式をたてると $64x + 6 = 216y + 8$，これは $32x - 108y = 1$ となる。この式は，”偶数ひく偶数が 1 である ”という式なので，解はありません。

解説）「よくこんな問題出すよね」という感じの問題だね。(1) で 2 進数を出すのも場違いだね。n 進数なんて，中・高生じゃほとんど使わないでしょう。まったく慣れていない分野だよね。と言うことで，いい問題じゃないね（試験のためだけの問題 = いただけない）。

(1) はレベル 3，(2) はレベル 2.5 ですね。(3) の $\boxed{\text{スセ}}$ はレベル 2，$\boxed{\text{タチツ}}$ はレベル 1，$\boxed{\text{テ}}$ は レベル 2 ですね。

第５問． 図 1 のように，平面上に 5 点 A, B, C, D, E があり，線分 AC, CE, EB, BD, DA によって，星形の図形ができるときを考える。線分 AC と BE の交点を P，AC と BD の交点を Q，BD と CE の交点を R，AD と CE の交点を S，AD と BE の交点を T とする。ここでは，

$$\mathrm{AP : PQ : QC} = 2 : 3 : 3\ ,\quad \mathrm{AT : TS : SD} = 1 : 1 : 3$$

を満たす星形の図形を考える。

以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数比で答えよ。

(a)

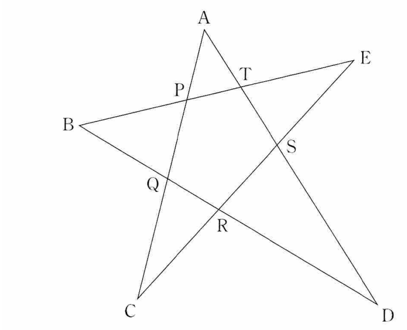


図 1

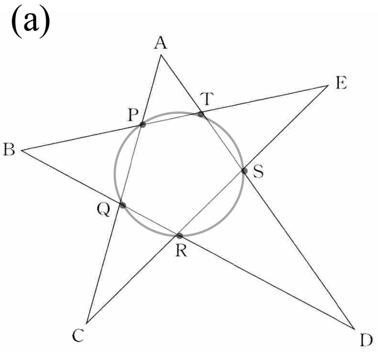
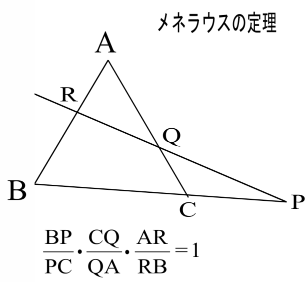


図 1



解答）(1) △AQD と直線 CE に着目すると，$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{AC}{CQ}=1$

が成り立つので（上の図のメネラウスの定理を参照せよ），

$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}=1$ より QR : RD $=1:4$ となる。

また，△AQD と直線 BE に注目すると，メネラウスの定理より，

$\frac{BD}{BQ}\cdot\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AT}{TD}=1 \Leftrightarrow \frac{BD}{BQ}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=1, \quad \therefore$ QB : BD $=3:8$

となる。したがって BQ : QR : RD $=3:1:4$ となることがわかる。

(2) 5 点 P, Q, R, S, T が同一円周上にあるとし，AC$=8$ であるとする。

解答）(i) 5 点 A, P, Q, S, T に着目すると，AT : AS $=1:2$ より，AT・AS=AP・AQ を用いると（上図 (a) 参照）

AT$=t$ とおいて $t\times 2t=2\times 5$ を解くと AT$=\sqrt{5}$ となる。さらに 5 点 D, Q, R, S, T に着目すると DR$=4\sqrt{3}$ となることがわかる。

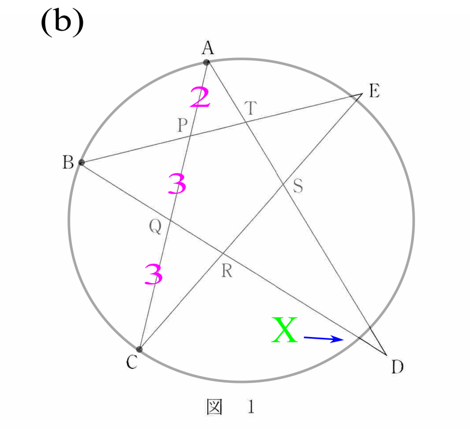
なぜならば，図 (a) における方べきの定理 DR·DQ=DS·DT から t =QR とおくと，
$4t\times 5t=3\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}$ より，$t=\sqrt{3}$. したがって DR$=4\sqrt{3}$.

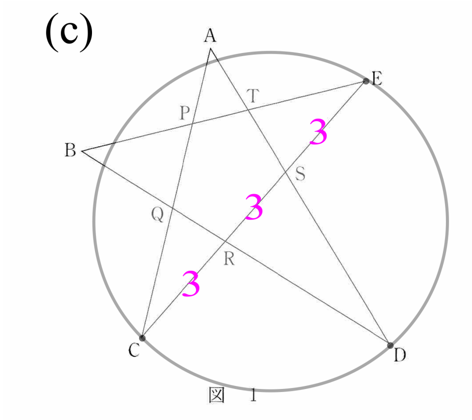
(ii) 3 点 A, B, C を通る円と点 D との位置関係を，次の構想に基づいて調べよう。

ーー＜構想＞ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

線分 AC と BD の交点 Q に着目し，AQ·CQ と BQ·DQ の大小を比べる。

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー





解答）まず，AQ·CQ$=5\cdot 3=15$ かつ BQ·DQ$=45$ （これは，(2) で示した QR$=\sqrt{3}$ より，BQ$=3\sqrt{3}$, DQ$=5\sqrt{3}$ となることからわかる）であるから，

AQ·CQ $<$ BQ·DQ $\cdots$ ①

が成り立つ。また，3 点 A, B, C を通る円と直線 BD との交点のうち，B と異なる点を X とすると（図 (b) 参照）

AQ·CQ $=$ BQ·XQ $\cdots$ ②

が成り立つ。① と ② の左辺は同じなので，① と ② の右辺を比べることにより XQ $<$ DQ が得られる。したがって，点 D は 3 点 A, B, C を通る円の外部にある。

(iii) 3 点 C, D, E を通る円と 2 点 A, B との位置関係について調べよう。

解答）この星形の図形において，さらに CR=RS=SE$=3$ となることがわかる（これ重要なヒントだね，導けますか？ 考えてみて下さい。ちょっと難しいかもね。以下，図 (c) 参照）。

ES·SC$=18$,　DS·SA$=3\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=30$　（図 (c) の円と線分 EC, DA で方べきの定理を考えよ）となる。したがって，点 A は 3 点 C, D, E を通る円の外部にあり，また，同様に図 (c) の円と線分 EC, DB で方べきの定理を考えることにより　DR·RB$=4\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=48$,　CR·RE$=18$ となることから，点 B は点 C, D, E を通る円の外部にある。

解説）出題者はメネラウスの定理が好きですね。一昨年も出てましたよね。メネラウスの定理は問題文の中に，参考として書いてあげた方がいいですね。受験生の半数近くはこの定理を正確に覚えていないでしょう。私も覚えていませんよ。全体としてはバランスの取れたいい問題ですが，歯ごたえのある問がなく，やや物足りなかったかな。

(1) はレベル 2，(2) の $\boxed{\text{カ}}$ はレベル 2.5，$\boxed{\text{キク}}$ 以降は全部レベル 2　ですね。

【総評】問題の難易度で考えると，バランスが悪かったですね。やさしい問題と難しい問題が偏って存在していた様です。また，普段ほとんど使わない n 進法の問題は，出さない方が良かったですね。

問題文は，共通テストになってから長すぎる傾向にあります。”考えさせる問題”というのが 1 つの狙いなのでしょうが，説明がくどすぎて，すっきりしない所が多々見られます。数学の問題は”単純でエレガント”であることも重要です。

問題の難易度にレベルを付けてきたので，これらの得点を表にしてみました。

表 1．　難易度別の配点

レベル	第 1 問 根号を含む式の計算 三角比　I	第 2 問 2 次関数と面積 データ分析　I	第 3 問 確率 場合の数　A	第 4 問 n 進法 不定方程式　A	第 5 問 メネラウスの定理 方べきの定理　A
4〜3.5	10	7	4		
3	10	14	6	5	
2.5	2	5	2	5	3
2	4	4	2	6	17
1.5			4		
1	4		2	4	
合計	30	30	20	20	20

今年の問題は，優・良・可で評価すると，良でしょうね。選択問題は，第 5 問がやや難しかったようです。難易度のバランスはとれていませんでしたね。

第 3 問と第 4 問を選択した場合と，第 3 問と第 5 問を選択した場合の，得点の合計は，難易度のレベルで考えると次のようになります。

	＜第 3 問，第 4 問を選択＞	＜第 3 問，第 5 問を選択＞
レベル 3 までできると	56 点	51 点
レベル 2.5　〃	70 点	63 点
レベル 2　〃	86 点	90 点
レベル 1.5　〃	90 点	94 点

平均点は，51.38 点でしたね。平均的な受験生はレベル 3 まではまあまあできたという感じですか？受験生全体の数学の学力はあまり伸びていないようですね，下がっていると考える方が妥当かな（ここ 3，4 年の平均点から推察）。

私がレベル 2 であるとした問題までは出来て欲しいですね。レベル 2 というのは，教科書の例題や問題などで一番難しいと思われるレベルの問題です。レベル 2 までできれば，合格点の範囲でしょうね。教科書をしっかり理解していれば，合格点は十分取れますよ（塾や予備校に通わなくても，独力でこのレベルに達することは可能ですよ）。頑張れ，若人よ !!

（3 月 16 日（土）’24 完，おとといのジョー）